DEVOIR DE SYNTHESE N°1

EXERCICE N°1 : 10' 3 points

Pour chaque question, une seule des propositions données est correcte.
L'élève doit cocher une seule des réponses données pour chaque question :

1°) Soit la fonction f définie sur IR par $f(x)=\cos\left(\pi x^2\right)$ on a $f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ est égal à :

☐ $-\sqrt{3}$, ☐ $-\frac{\pi}{2}$, ☐ $-\pi$,

2°) Soit l'équation $E: z^2-2\sqrt{3}z+25=0$, et z_1 et z_2 sont les solution de E, alors on a :

☐ $\arg\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)\equiv 0[2\pi]$, ☐ $\arg\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)\equiv \pi[2\pi]$, ☐ $\arg\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)\equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

3°) Les solutions de l'équation $z^5=-32i$ sont :

☐ $2e^{i\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}\right)}$, $k\in\{0,1,2,3,4\}$, ☐ $2e^{i\left(-\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}\right)}$, $k\in\{0,1,2,3,4\}$, ☐ $2e^{i\left(\frac{3k\pi}{10}\right)}$, $k\in\{0,1,2,3,4\}$.

EXERCICE N°2 : 15' 6 points

I– Soit $(E_\theta): z^2-2e^{i\theta}z+2e^{2i\theta}=0$, $\theta\in[0,\pi]$.

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_0).

2°) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ).

b) Donner le module et un argument de chacune des solutions de l'équation (E_θ).

II– 1°) Soit : $f(z)=z^3-2(1+i)z^2+2(1+2i)z-4i$.

a) Montrer que f admet une solution imaginaire que l'on précisera.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$; $f(z)=0$.

2°) Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

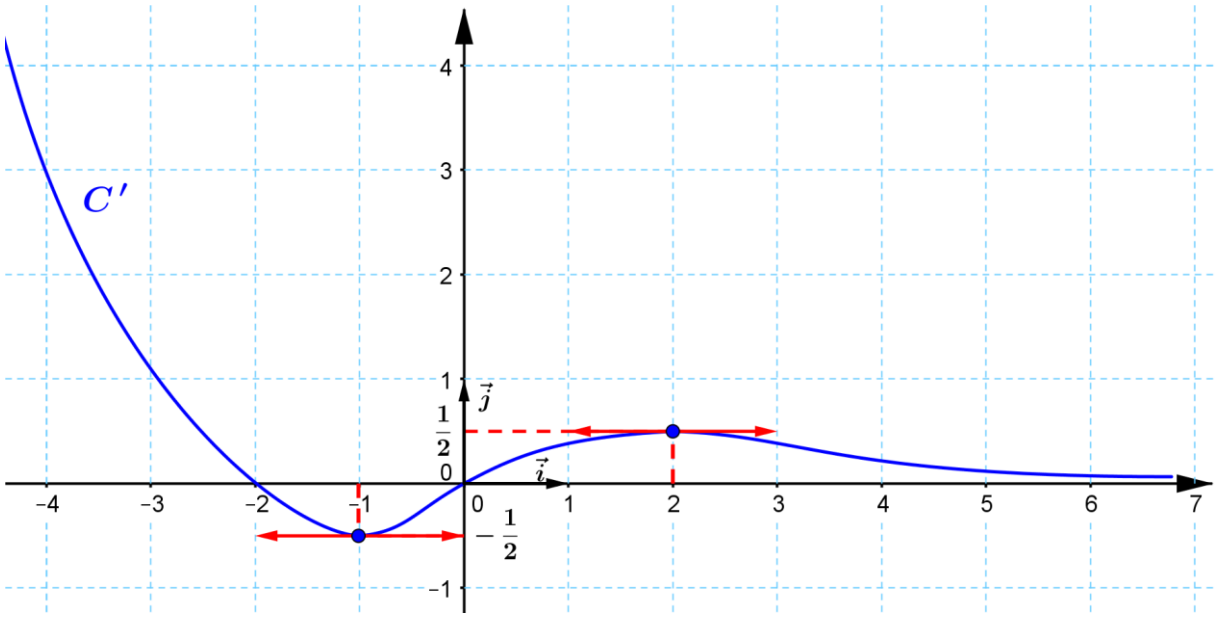
On donne les points $A(2i)$; $B(1+i)$; $C(1-i)$ et $D(-4i)$.

a) Placer les points A, B, C et D.

b) Donner la nature du quadrilatère $ABCD$ et calculer son aire.

EXERCICE N°3 :	30'	6 points	

Soit f une fonction **deux fois dérivable** sur IR telle que $f(2)=2$ $f'(2)=\frac{1}{2}$ et C sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$,dans le graphique ci-dessous C' est la courbe de la fonction dérivée f' de f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, l'axe des abscisses est une asymptote à C'.



En utilisant le graphique :

1°) Donner le sens de variation de f sur IR .

2°) a) Dresser le tableau de variation de f' sur IR, en déduire que C admet deux points d'inflexion dont on précisera leurs abscisses.

b) Justifier que C admet deux tangentes horizontales.

3°) a) Montrer que la tangente à C au point d'abscisse 2 passe par le point A(0,1).

b) Montrer que l'équation $f''(x)=\frac{1}{8}$ admet au moins une solution dans $]-2,2[$.

c) Montrer que : $2\le f(3)\le\frac{5}{2}$.

4°) Soit U la suite définie sur IN par $U_0=\frac{5}{2}$ et $U_{n+1}=f(U_n)$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n : $U_n\ge 2$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n : $|U_{n+1}-2|\le\frac{1}{2}|U_n-2|$.

c) Montrer que pour tout entier naturel n : $|U_n-2|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$, calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

EXERCICE N°4 :	30'	5 points	

Soit (u_n) la suite définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 \in]0,1[\cup]1,+\infty[\\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \text{ , pour tout } n \in \text{IN} \end{cases}$.

1°) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

b) Démontrer que **si** la suite (u_n) converge **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2°) On suppose dans cette question que $0 < u_0 < 1$.

a) Montrer que pour tout $n \in IN$, $0 < u_n < 1$.

b) En déduire que (u_n) est convergente.

c) On pose pour tout $n \in IN$, $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k^2$, Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

Dans la suite, on pose que $u_0 > 1$

3°) a) Vérifier que $u_1 < 0$.

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN^*$, $u_n \le u_1$.

c) En déduire que la suite (u_n) n'est pas minorée, et déterminer sa limite.

d) On pose pour tout $n \in IN^*$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{1-u_k}$.

Vérifier que pour tout $k \in IN$, $\dfrac{1}{1-u_k} = \dfrac{1}{u_{k+1}} - \dfrac{1}{u_k}$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Tél : +216 29 862 229 / +216 29 862 464 - Email : contact@takiacademy.com